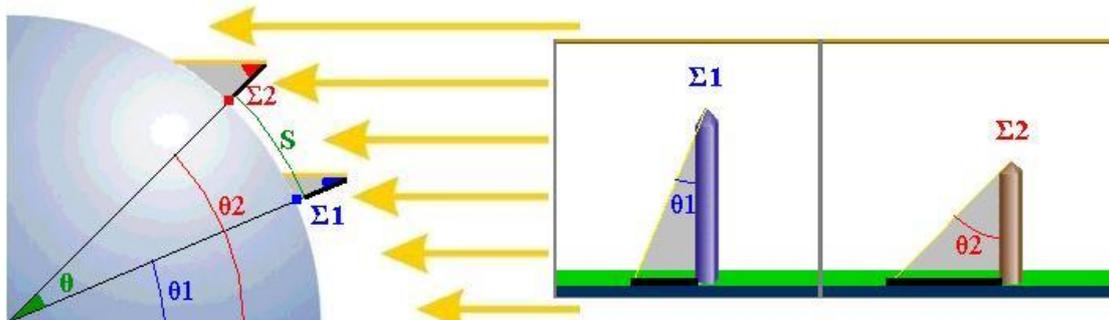




Διαθεματική Δράση 2017-2018



**Το Πείραμα του Ερατοσθένη
για τον υπολογισμό της περιφέρειας της Γης
στο πλαίσιο του Έτους Μαθηματικών 2018**



Υπεύθυνοι Καθηγητές	Ευριπίδης Βραχνός, ΠΕ19/ΠΕ03
	Μαρία Χατζηγεωργίου ΠΕ04
Θεματική Δράσης	Μαθηματικά, Γεωγραφία, Πληροφορική
Τάξη	Β Γυμνασίου
Ημέρα	Τρίτη 20 Μαρτίου / Τετάρτη 21 Μαρτίου
Ώρα	12:34
Χώρος	Προαύλιο
Ιστότοπος Δράσης	http://evripides.mysch.gr/eratosthenes
Αριθμός Μαθητών	80 μαθητές

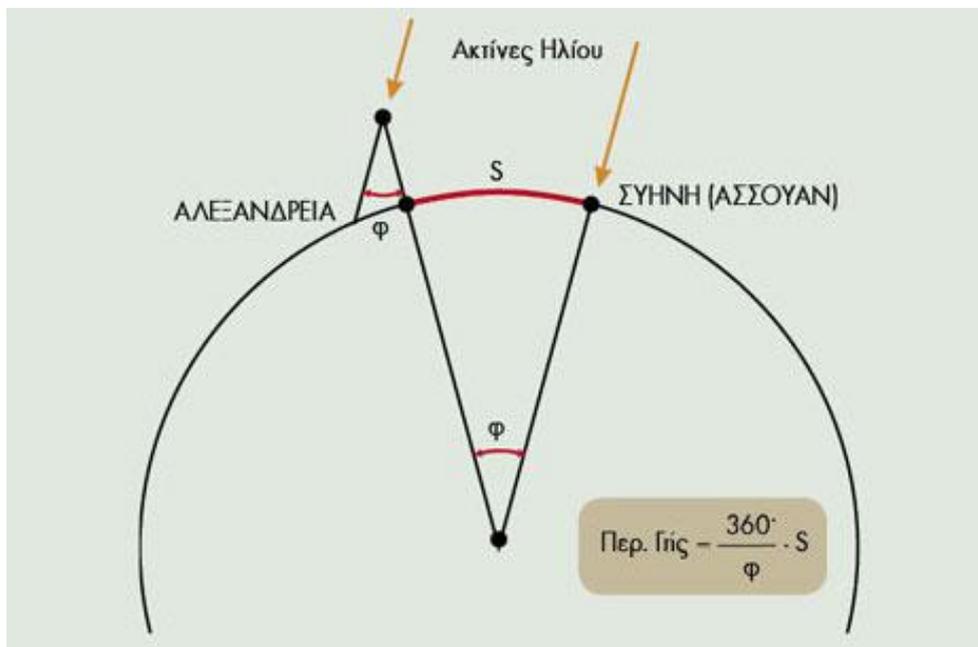
Λίγα λόγια για την ιστορία του πειράματος



Ο Ερατοσθένης (3^{ος} π.Χ. αιώνας) ήταν Διευθυντής της μεγάλης Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας, όπου σε έναν πάπυρο διάβασε ότι το μεσημέρι της 21^{ης} Ιουνίου (θερινό ηλιοστάσιο), στη Σύηνη (Ασσουάν), οι κατακόρυφοι στύλοι δεν έριχναν καθόλου σκιά και ο Ήλιος καθρεφτιζόταν ακριβώς στον πυθμένα ενός πηγαδιού. Παρατήρησε όμως ότι στην Αλεξάνδρεια, κατά την ίδια μέρα, οι κατακόρυφοι στύλοι έριχναν σκιά. Σκέφτηκε πως αν η Γη ήταν επίπεδη, οι κατακόρυφοι στύλοι στις δυο πόλεις θα ήταν

παράλληλοι και θα έπρεπε και οι δυο να ρίχνουν σκιά. Αφού, λοιπόν, αυτό δεν είναι αλήθεια, τι μπορεί να συμβαίνει; Την απάντηση έδωσε ο Ερατοσθένης υποστηρίζοντας ότι η επιφάνεια της Γης δεν είναι επίπεδη όπως νόμιζαν τότε αλλά σφαιρική. Ο υπολογισμός της ακτίνας της Γης μπορεί να γίνει, αν είναι γνωστή η απόσταση Σύηνης-Αλεξάνδρειας -την οποία σύμφωνα με μαρτυρίες, ο Ερατοσθένης για να τη μετρήσει προσέλαβε βηματιστές- και η διαφορά των γεωγραφικών πλατών των δύο πόλεων, η οποία -από το μήκος της σκιάς ενός οβελίσκου- υπολογίστηκε ίση με περίπου 7 μοίρες.

Τελικά η περιφέρεια της Γης υπολογίστηκε ίση με 40.000 Km, μια απάντηση που ο Ερατοσθένης έδωσε χρησιμοποιώντας ως μόνα εργαλεία ράβδους, μάτια, πόδια, μυαλό με απλότητα σκέψης και επινοητικότητα. Το λάθος στον υπολογισμό ήταν μόνο 2%, ένα πραγματικά αξιοσημείωτο επίτευγμα για περίπου πριν από 2,5 χιλιάδες. Επομένως, ο Ερατοσθένης ήταν ο πρώτος άνθρωπος που μέτρησε τις διαστάσεις του πλανήτη Γη, γι' αυτό και θεωρείται δημιουργός της μαθηματικής γεωγραφίας.



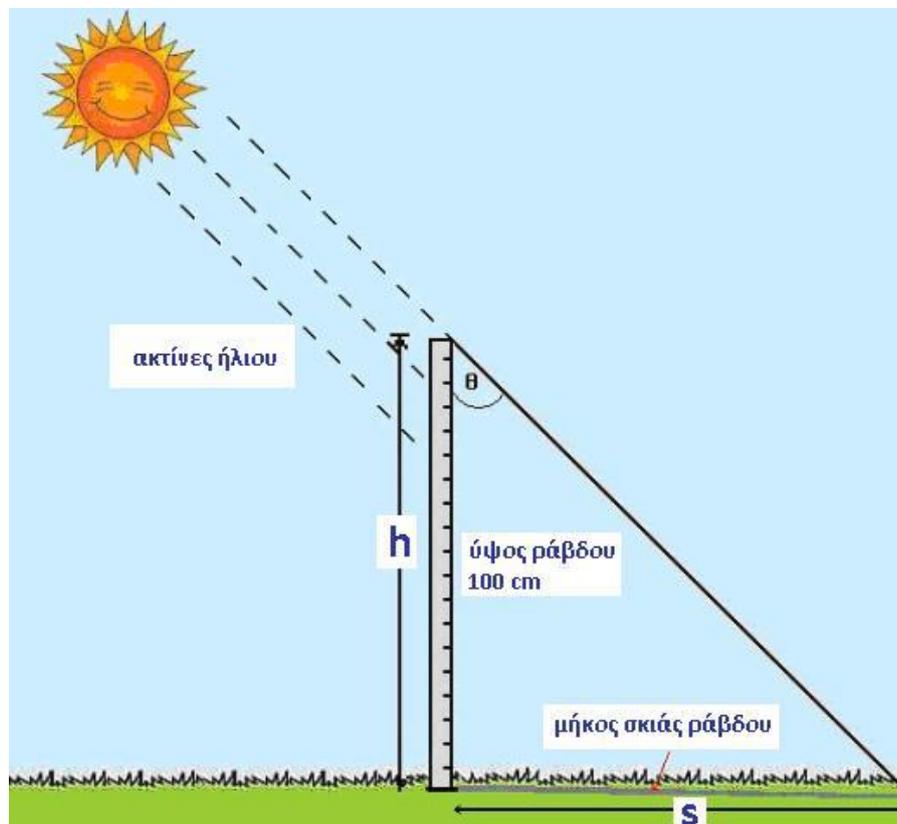
Παιδαγωγικά οφέλη

Εκτελώντας το ιστορικό αυτό πείραμα, τα παιδιά έχουν τη δυνατότητα να γνωρίσουν το μεγαλείο της εξέχουσας προσωπικότητάς ενός μεγάλου επιστήμονα και ιστορικά στοιχεία της εποχής του, να παρατηρήσουν την κίνηση των ουράνιων σωμάτων, να πάρουν πειραματικές μετρήσεις, να εκτελέσουν υπολογισμούς και να χρησιμοποιήσουν τις Νέες Τεχνολογίες εποικοδομητικά, αποκομίζοντας έτσι πολύπλευρο όφελος. Η συμμετοχή τους σε μια τόσο ιδιαίτερη διεπιστημονική εκπαιδευτική εμπειρία, αποτελεί σύμφωνα με τους ίδιους τους μαθητές, «ένα τέλει μάθημα που δεν θέλουν να το χάσουν!» και τους οδηγεί με μοναδικό τρόπο στην κατάκτηση της γνώσης, ενώ παράλληλα συνειδητοποιούν τη διαχρονική συνεισφορά του ελληνικού στοιχείου στο παγκόσμιο ιστορικό επιστημονικό γίγνεσθαι.

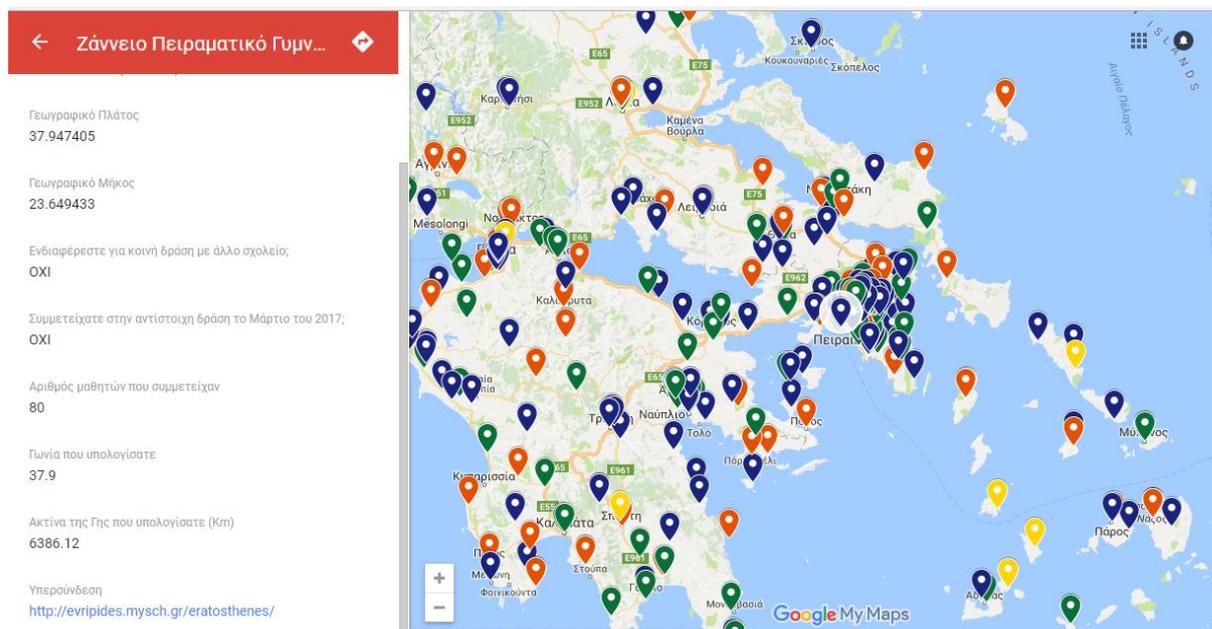
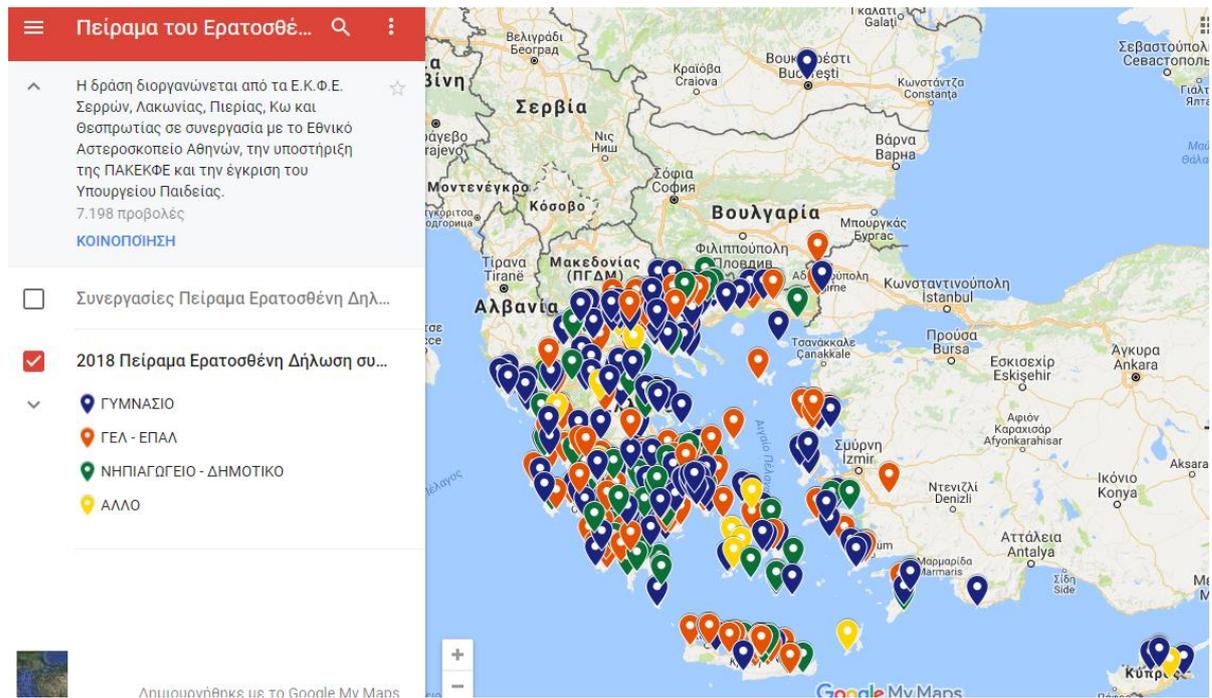
Η δραστηριότητα της υλοποίησης του ιστορικού πειράματος του Ερατοσθένη είναι ιδιαίτερα απλή. Με την απλότητα όμως αυτή, είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακό ότι κατορθώνει να:

- διδάσκει βιωματικά στους συμμετέχοντες, τις βασικές αρχές της ερευνητικής μεθοδολογίας
- οδηγεί στη διαπιστωμένη γνώση και αποδοχή της αξίας των Θετικών Επιστημών για την κατανόηση του σύμπαντος κόσμου
- προσελκύει αβίαστα το ενδιαφέρον των μαθητών και μαγνητίζει τη σκέψη αρκετών, ώστε να προωθεί και να καλλιεργεί τη θετική στάση τους απέναντι στις Θετικές Επιστήμες

Επιπλέον, μέσω της δράσης αυτής, **αναδεικνύεται η ανεκτίμητη αξία της συνεργασίας**, αφού συνεργάζονται υποδειγματικά, γόνιμα και δημιουργικά μαθητές κατά τη λήψη μετρήσεων και αποφάσεων ανά ομάδες σε κάθε σχολική τάξη.



Το πλαίσιο



Το σχολείο μας συμμετείχε σε ένα δίκτυο 800 σχολείων από την Ελλάδα, την Κύπρο και την Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, τα οποία εκτέλεσαν την ίδια μέρα (όχι όμως την ίδια ώρα, βλέπε solar noon) το πείραμα του Ερατοσθένη. Η πρωτότυπη αυτή δράση, συνδιοργανώθηκε και συντονίστηκε από τα Εργαστηριακά Κέντρα Φυσικών Επιστημών (Ε.Κ.Φ.Ε.) Σερρών, Πιερίας, Λακωνίας, Κω και Θεσπρωτίας σε συνεργασία με το Εθνικό Αστεροσκοπείο Αθηνών, την υποστήριξη του Υπουργείου Παιδείας Έρευνας και Θρησκευμάτων και της Πανελληνίας Ένωσης Υπεύθυνων Ε.Κ.Φ.Ε. (ΠΑΝΕΚΦΕ). Στη συνέχεια καταχωρήσαμε τα στοιχεία του σχολείου μας και τα αποτελέσματα του πειράματος σε μια διαδικτυακή βάση δεδομένων. Στους παραπάνω χάρτες φαίνονται οι μετρήσεις που έκαναν οι μαθητές μας.

Γνωστικά αντικείμενα – Σύνδεση με πρόγραμμα σπουδών

Η δράση είναι διαθεματική και συνδέει έννοιες από τα μαθηματικά, την πληροφορική και την γεωγραφία, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Γνωστικό αντικείμενο	Τάξη	Έννοιες
Μαθηματικά	A' τάξη	Εντός εναλλάξ γωνίες
	B' τάξη	Τριγωνομετρία, εφαπτομένη, μήκος τόξου Γεωγραφικές συντεταγμένες
Γεωγραφία		Γεωγραφικό μήκος και πλάτος Εαρινή ισημερία, περιστροφή άξονα γης
Πληροφορική	B' τάξη	Αναζήτηση στον παγκόσμιο ιστό Σχεδιασμός Ιστοσελίδων

Μεθοδολογία

Η δράση έγινε σε όλα τα τμήματα της Β' τάξης (B1, B2, B3). Σε κάθε τμήμα αφιερώσαμε μια ώρα στην οποία έγινε ενημέρωση-συζήτηση για το πείραμα. Επίσης έγινε ανάκληση των γνώσεων που χρειάζονται οι μαθητές όπως οι εντός εναλλάξ γωνίες και η τριγωνομετρία από τα μαθηματικά και οι γεωγραφικές συντεταγμένες και η ισημερία από τη γεωγραφία. Χρειάστηκε ακόμα να υπενθυμίσουμε στους μαθητές τον τρόπο με τον οποίο περιστρέφεται η γη γύρω από τον άξονά της ώστε να καταλάβουν δυο βασικά πράγματα:

- γιατί το πείραμα πρέπει να γίνει την εαρινή ισημερία και
- γιατί η γωνία που θα υπολογίσουν είναι ταυτόχρονα το γεωγραφικό πλάτος του σχολείου.

Στη συνέχεια οι μαθητές αναζήτησαν στον παγκόσμιο ιστό την πραγματική ακτίνα και περιφέρεια της Γης, όπως και πληροφορίες για τη ζωή και το έργο του Ερατοσθένη.

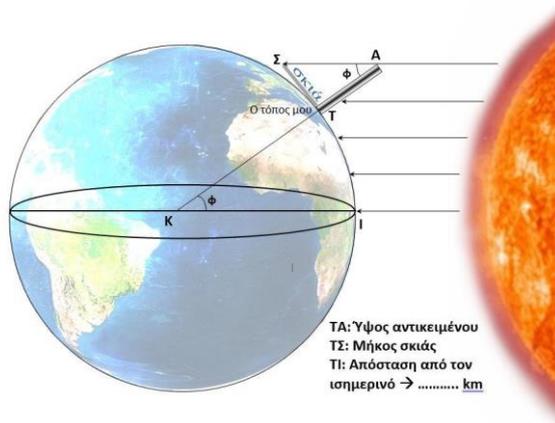
Έτσι στις 20 Μαρτίου 2018 και ώρα 12:34 για το Ζάννειο Γυμνάσιο έγιναν οι μετρήσεις στην αυλή του σχολείου. Χρησιμοποιήσαμε 8 ράβδους μήκους 1 μέτρου και χωρίσαμε τους μαθητές σε ομάδες των 4-5 ατόμων. Κάθε ομάδα πήρε μια ράβδο και έκανε τη δική της μέτρηση. Στη συνέχεια συμπλήρωσαν το φύλλο εργασίας και ανεβήκαμε πάλι στην τάξη όπου προσπαθήσαμε να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα.

Η επιλογή να έχουμε πολλές ομάδες μαθητών οι οποίες κατέληξαν σε διαφορετικά αποτελέσματα έδειξε στους μαθητές πόσο δύσκολη είναι μια τέτοια μέτρηση πρακτικά, ενώ στη θεωρία φαίνεται διαφορετικά. Επίσης ενώ αρχικά είχαμε σχεδιάσει να έχουν όλες οι ράβδοι ύψος 1 μέτρο τελικά αφήσαμε κάποιες ράβδους με λίγο μεγαλύτερο ύψος, έτσι ώστε να δουν οι μαθητές πως όσο περισσότεροι υπολογισμοί υπεισέρχονται σε ένα πείραμα τόσο μεγαλύτερο σφάλμα δημιουργείται. Κάτι ακόμα που δοκιμάσαμε ήταν να δώσουμε σε μια ομάδα λίγο διαφορετική απόσταση από τον ισημερινό. Επειδή η απόσταση αυτή πολλαπλασιάζεται με μεγάλο αριθμό και υπεισέρχονται και άλλες πράξεις, όπως διαίρεση άρα και αποκοπή δεκαδικών ψηφίων, το αποτέλεσμα έχει αρκετά μεγάλο σφάλμα σε σχέση με αυτό που αναμένει κάποιος αρχικά. Αυτό έγινε για να δείξουμε στους μαθητές ότι ακόμα και πολύ μικρές αποκλίσεις στις μετρήσεις γιγαντώνονται όταν τροφοδοτούν πολύπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς. Επίσης σε αυτό το σημείο έγινε συζήτηση

για την αναπαράσταση των άρρητων αριθμών στην πεπερασμένη μνήμη του υπολογιστή.

Περιγραφή των βημάτων της δράσης

Σχεδιασμός του πειράματος



Αν θεωρήσουμε ότι ο κύκλος στο διπλανό σχήμα είναι η Γη τότε η έλλειψη στο κέντρο είναι ο ισημερινός.

Τις ημέρες κοντά στην εαρινή ισημερία, όσοι βρίσκονται στον ισημερινό της Γης θα παρατηρήσουν ότι ο Ήλιος το μεσημέρι βρίσκεται πολύ κοντά στο ζενίθ. Επομένως οι ακτίνες πέφτουν κατακόρυφα και ο Ήλιος θα μπορούσε να καθρεφτίζεται στον πυθμένα ενός πηγαδιού. Η προέκταση μιας ακτίνας του Ήλιου είναι η ΙΚ και περνάει από το κέντρο

της Γης Κ. Έστω ότι εμείς είμαστε στη θέση Τ. Αν τοποθετήσουμε μια κατακόρυφη ράβδο ΤΑ=Υcm τότε αυτή το μεσημέρι (πχ στις 12:34 μ.μ. για τον Πειραιά) έχει σκιά ΤΣ=Χcm. Αυτή είναι η κατάλληλη ώρα που θα πρέπει να κάνουμε την μέτρησή μας.

Η ώρα αυτή είναι το μεσημέρι για κάθε τόπο (solar noon). Για να βρούμε την συγκεκριμένη ώρα για το δικό μας τόπο, χρησιμοποιούμε την online εφαρμογή που βρίσκεται στον δικτυακό τόπο:

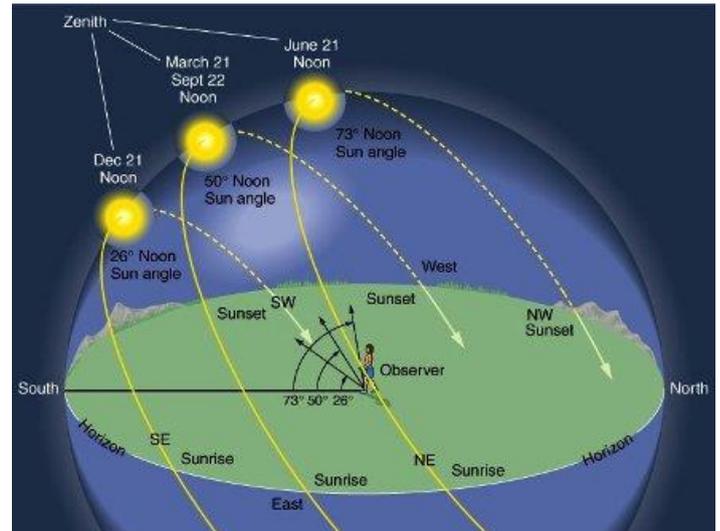
Υπολογίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ΣΑΤ από το λόγο Χ/Υ και έτσι βρίσκουμε την γωνία που είναι φ μοίρες.

$$\epsilon\phi\phi = \frac{\text{μήκος σκιάς}}{\text{μήκος ράβδου}}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε είτε τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών στην τελευταία σελίδα του βιβλίου μαθηματικών της Β' γυμνασίου είτε τη συνάρτηση arctan σε μια αριθμομηχανή ή στο wolfram alpha.

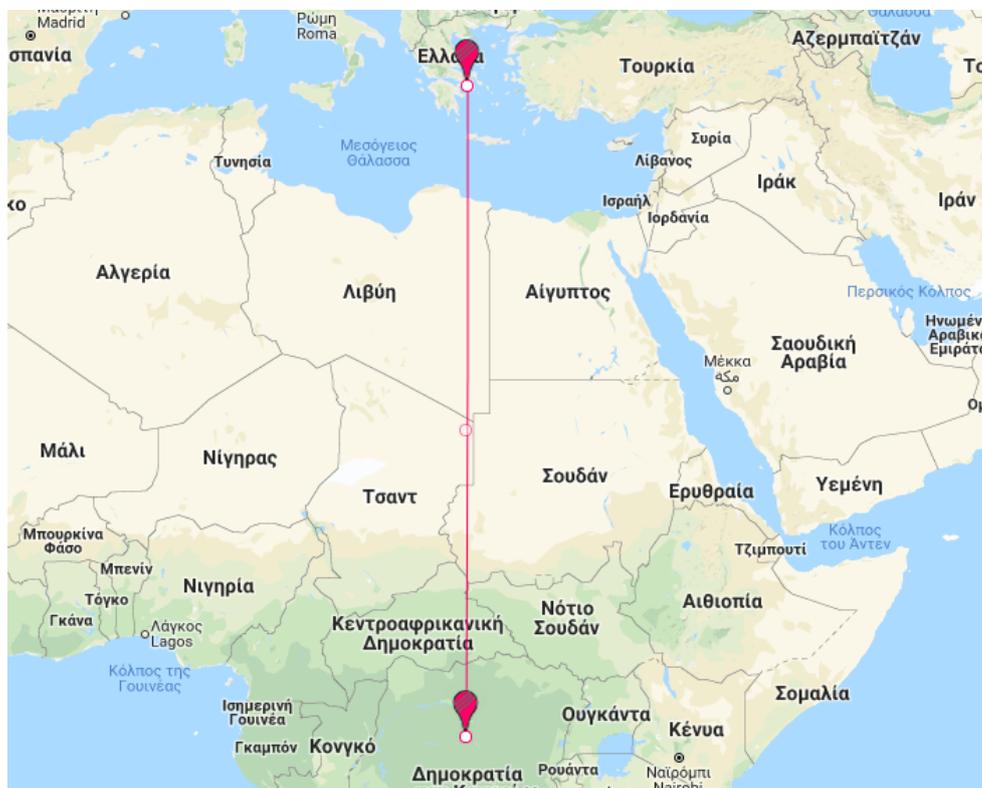
Η γωνία φ είναι ίση με την επίκεντρη γωνία ΤΚΙ. Στο σημείο αυτό εξηγήσαμε στους μαθητές ότι επειδή η μέτρηση γίνεται κατά την εαρινή ισημερία η γωνία φ ταυτίζεται με το γεωγραφικό πλάτος του τόπου. Για αυτό χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε μια διαδικτυακή εφαρμογή η οποία επίσης υπολογίζει την ακριβή ώρα του ηλιακού μεσημεριού (solar noon) για κάθε μέρα. Αν μεταβείτε στον παρακάτω σύνδεσμο θα μάθετε τι ώρα ακριβώς βρίσκεται ο ήλιος πάνω από το Ζάννειο Γυμνάσιο όποια μέρα θέλετε:

<http://suncalc.net/#/37.9473,23.6494,18/2018.03.20/15:36>



Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε την απόστασή μας από τον ισημερινό. Εδώ θα πρέπει να τονιστεί στους μαθητές ότι υπολογίζουμε την απόσταση από το σημείο εκείνο του ισημερινού που έχει το ίδιο γεωγραφικό μήκος με εμάς. Αυτό μπορεί να γίνει με χρήση μιας άλλης online εφαρμογής, η οποία βρίσκεται στην διεύθυνση:

<https://www.daftlogic.com/projects-google-maps-distance-calculator.htm?route=41.09347629615095,23.55017066001892%7c0.0000026822090895318437,23.550479114055634>



Οι υποθέσεις

Υποθέτουμε ότι η Γη είναι σφαιρική.

Ο Ήλιος βρίσκεται πολύ μακριά από τη Γη ώστε οι ακτίνες του φτάνουν σ' αυτή σχεδόν παράλληλες.

Οι ακτίνες του Ήλιου έχουν την ίδια διεύθυνση με την κατακόρυφο στο τόπο αυτό, το μεσημέρι της ισημερίας.

Η ιδέα

Εφόσον το Ζάννειο βρίσκεται βορειότερα του αντίστοιχου σημείου του Ισημερινού και μάλιστα στον ίδιο περίπου μεσημβρινό μ' αυτό, μια κατακόρυφη ράβδος θα παρουσιάζει στην περιοχή αυτή κάποιο μήκος σκιάς το μεσημέρι της ισημερίας. Μ' άλλα λόγια η διεύθυνση των ακτίνων του Ήλιου θα σχηματίζει κάποια γωνία με την κατακόρυφο, κάτι που επαλήθευσε ο Ερατοσθένης στην Αλεξάνδρεια. Μια ράβδος στο σημείο του ισημερινού που οι ακτίνες του ήλιου πέφτουν κάθετα δεν θα δημιουργούσε σκιά.

Υλοποίηση του πειράματος

Τη Δευτέρα 20 Μαρτίου στις 12:34, οι μαθητές των τμημάτων Β2 και Β3 και την Τρίτη 21 Μαρτίου οι μαθητές του Β1 την ώρα ακριβώς που μεσουρανούσε ο Ήλιος, με πολύ απλά μέσα, ακολούθησαν πιστά τα βήματα και τους συλλογισμούς του μεγάλου πανεπιστήμονα Ερατοσθένη, όπως έγιναν το 240 π.Χ.(!)

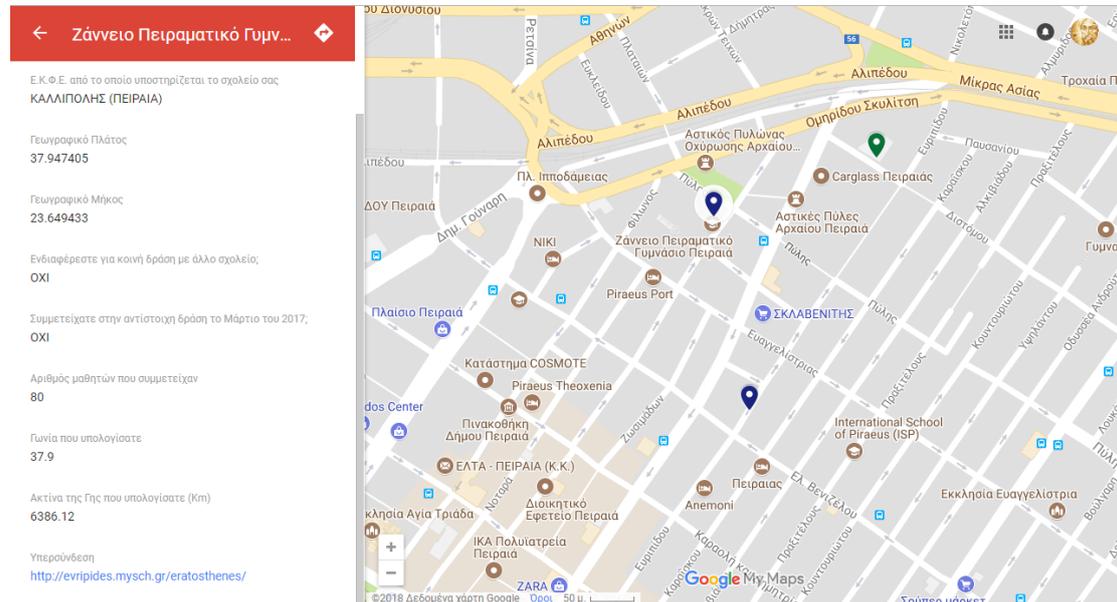
Οι μαθητές της Β' τάξης, με την καθοδήγηση του δασκάλου Ερατοσθένη, κατόρθωσαν να υπολογίσουν την περιφέρεια της Γης με τρόπο εκπληκτικό και με σφάλμα ελάχιστο!

Οι σύγχρονοι "Γεω-μέτρες" μαθητές στερέωσαν κατακόρυφα ράβδους ή άλλα αντικείμενα, μέτρησαν το ύψος τους και το μήκος της σκιάς τους και στη συνέχεια, με απλούς μαθηματικούς υπολογισμούς και με τη βοήθεια κατάλληλων εφαρμογών των Νέων Τεχνολογιών (Google Earth, SunCalc κ.ά.), υπολόγισαν την περιφέρεια και την ακτίνα της Γης.



Αποτελέσματα

Τα τελικά αποτελέσματα του πειράματος για το σχολείο μας φαίνονται στον παρακάτω χάρτη της δράσης.



Απόσταση του σχολείου μας από τον ισημερινό:	4224,30 km
Γωνία που μετρήσαμε:	37,9°
Περιφέρεια της γης που υπολογίσαμε:	40125,2 km
Ακτίνα της γης που υπολογίσαμε:	6386,12 km
Πραγματική ακτίνα της γης:	6371 km
Απόλυτο Σφάλμα υπολογισμού της ακτίνας:	15,12 km
Ποσοστιαίο σφάλμα υπολογισμού :	0,23%